

Трещины растяжения и сдвига в модели Дагдейла — Баренблатта

© Я. М. Хазан*, Ю. А. Фиалко**, 2001

*Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

**Калифорнийский технологический институт, Пасадена, Калифорния, США

Поступила 20 ноября 2000 г.

Представлено членом редколлегии С. В. Мостовым

В моделі Дагдейла—Баренблатта (ДБ) отримано точні розв'язки для рівноважних двовимірних щілин розтягнення та зсуву у нескінченному пружному просторі. Показано, що у ДБ-моделі наближені розв'язки залежать від критичної довжини l^* , що становить 3—10 см для вапняків та гранітів за умовами нульового всебічного тиску. Довга тріщина, тобто тріщина, напівдовжина якої $l \gg l^* \sigma_T / (\sigma_T + p)$, де σ_T — когезійні напруження, що діють поблизу кінчиків тріщини, а p — рівноважний внутрішній тиск, розповсюджується із збереженням довжини когезійної зони і структури поля напружень поблизу кінчика. У цьому граничному випадку енергія руйнування і удаваний коефіцієнт інтенсивності напружень K_Q не залежать від довжини тріщини, і їх можна розглядати як властивості матеріалу. Мікротріщини, тобто тріщини, для яких $l \ll l^* \sigma_T / (\sigma_T + p)$, за багатьма ознаками відрізняються від макротріщин. Для мікротріщин типу I в умовах розтягнення рівноважна напівдовжина відкритої частини тріщини набагато менша за критичну довжину, $l \ll l^*$, але повна напівдовжина (довжина відкритої частини плюс довжина когезійної зони) може бути набагато більше за l^* . Для таких мікротріщин ДБ-моделю завбачає залежність $K_Q \propto \sqrt{l}$ у згоді з експериментальними даними. Внаслідок цього для мікротріщин розтягнення енергія руйнування не є матеріальною властивістю. Повна довжина мікротріщин гідророзриву, заповнених до основи когезійної зони, порядку $l^* \sigma_T / (\sigma_T + p)$, де p_∞ — всебічний (літостатичний) тиск, і є набагато більшою за довжину відкритої частини, а рівноважний внутрішній тиск значно перевищує когезійні напруження і всебічний тиск. Мікротріщини стають зв'язаними, коли повна довжина наближується до відстані між тріщинами. В областях мантийних висхідних рухів проникність частково розплавлених порід може зростати разом із повною довжиною тріщин внаслідок декомпресії. Для довгих тріщин в умовах високого всебічного тиску ДБ-моделю передбачає зростання K_Q разом із збільшенням всебічного тиску і довжини області поблизу кінчика, що є непроникною для рідини. Такий опір розповсюдженню тріщин, що індукований всебічним тиском, призводить до переважання впливу всебічного тиску щодо міцності гірських порід, починаючи з порівняно невеликих глибин (сотні метрів).

We derive exact solutions for two-dimensional equilibrium tensile and shear Dugdale-Barenblatt (DB) cracks in an infinite elastic body. We show that in the DB approximation the solutions depend on critical length l^* that equals 3—10 cm for limestone and granite under zero confining pressure. For long cracks, i.e. in the limit $l \gg l^* \sigma_T / (\sigma_T + p)$, where l , σ_T and p stand for the halflength of the developed part of a crack, cohesive stress acting at a crack tip and equilibrium internal pressure, correspondingly, a crack propagates preserving the length of the cohesive zone, and structure of the stress field in the vicinity of the tip. In this limit fracture energy, and apparent stress intensity factor K_Q do not depend on a crack length and could be considered as material properties. Microcracks, i.e. cracks having length $l \ll l^* \sigma_T / (\sigma_T + p)$, differ in many aspects from macrocracks. For mode I microcracks under atmospheric pressure and ambient extension, an equilibrium halflength of an open crack is much smaller than the critical length, $l \ll l^*$, but the total crack halflength (open crack halflength plus a cohesive zone) may greatly exceed l^* . Also, for such microcracks the DB model predicts a scaling $K_Q \propto \sqrt{l}$, in agreement with experimental data. Such scaling implies that for small tensional cracks the fracture energy is not a material property. The total length of fluid driven microcracks filled up to the cohesive zone base is of the order of $l^* \sigma_T / (\sigma_T + p_\infty)$ where p_∞ stands for confining (lithostatic) pressure, and an equilibrium internal pressure greatly exceeds cohesive stresses and confining pressure. Microcracks become interconnected when the total crack length approaches the characteristic spacing between the cracks. In the regions of mantle upwellings, the permeability of partially molten rocks may increase as a result of an increase in the total crack length due to decompression. For long cracks under high confining pressure the DB model predicts an increase of K_Q with confining pressure and the length of region at the crack tip not penetrated by fluid. An increase in the pressure induced fracture resistance for fluid driven cracks results in domination of the confining pressure effects over intrinsic rock strength starting from quite shallow depth (hundred of meters).

1. Введение. Разрушение твердых тел, в том числе и горных пород, представляет собой сложную совокупность процессов, включающую образование и накопление повреждений, начиная с атомарного уровня и до образования макроскопических дефектов. В поликристаллической структуре отдельные кристаллиты и пограничные слои между ними имеют сложную форму, различающийся состав и, соответственно, отличающиеся механические свойства, зависящие, к тому же, от термодинамических условий. Разрушение или деформация одного из зерен или межкристаллитных слоев приводит к перераспределению напряжений. В итоге трещина распространяется по направлению, которое определяется крупномасштабным полем напряжений, однако ее локальная траектория может иметь сложную, нерегулярную, во многом случайную форму. Поверхности разрушенных тел проявляют выраженные фрактальные свойства. Истинные площади поверхности трещины оказываются при этом больше, чем определяемые по данным макроскопических измерений. Возможно, в этом заключается одна из причин хорошо известного факта, что поверхностные энергии металлов, оцениваемые по исследованиям хрупкого разрушения, систематически выше, чем энергии, получаемые с помощью других методов. В геофизике фрактальный характер процесса разрушения проявляется в том, что структура зон разломов оказывается самоподобной на всех уровнях, начиная с регионального и кончая микроскопическим.

В силу чрезвычайной сложности процесса разрушения особый интерес представляют феноменологические модели, цель которых — выполнение количественных расчетов, использующих сравнительно небольшое количество материальных констант, определяемых эмпирически. В идеале эти материальные константы должны рассчитываться в рамках точной микроскопической теории, но в действительности даже для наиболее изученных металлических систем количественная связь между особенностями макроскопического поведения, такими как вязкость разрушения или хрупко — пластичный переход, и микроскопической структурой установлена только на качественном уровне.

При феноменологическом описании предполагается, что собственно разрушение происходит в области неупругого деформирования (ОНД) вблизи кончика трещины, который является концентратором напряжений. Линейная упругая механика разрушения (ЛУМР) (см., например, [1, 2]) рассматривает ситуацию, когда

размеры ОНД малы по сравнению со всеми остальными характерными размерами, в частности тела и трещины. Если при этом сами трещины моделировать математическими разрезами, на которых происходит разрыв смещений, то задача нахождения напряжений и смещений в окрестности кончика может быть сведена к двумерной. В этом случае напряжения σ_{ij} ($i, j = x, y$) вблизи кончика трещины оказываются слабо сингулярны, а их зависимость от расстояния r до кончика имеет универсальный вид $\sigma_{ij} = K f_{ij}(\theta) / \sqrt{2\pi r}$, где K — так называемый коэффициент интенсивности напряжений, зависящий от способа нагружения, размеров и формы трещины, θ — угол между плоскостью кончика и площадкой, на которой вычисляются напряжения [2]. В ЛУМР общее решение задачи о напряжениях в окрестности кончика трещины представляется в виде линейной комбинации трех частных решений: нормального отрыва (разрывным является нормальное к трещине смещение), а также поперечного и продольного сдвига (разрывными являются смещения в плоскости трещины). Для каждой из этих схем нагружения угловая зависимость напряжений $f_{ij}(\theta)$ имеет известный вид [2], а критические значения коэффициентов интенсивности напряжений (в первую очередь K_{Ic} — вязкость разрушения, введенная Ирвином [3]), соответствующие стагнации трещины, считаются материальными константами.

В то же время лабораторные данные по разрушению образцов горных пород и опыт применения ЛУМР с целью интерпретации полевых и лабораторных исследований гидроразрыва, широко использовавшегося для стимуляции месторождений нефти и газа, показали, что концепция постоянства K_{Ic} применима лишь в очень узком диапазоне условий. В частности, обнаружилось систематическое расхождение между теоретическими предсказаниями и полевыми измерениями давления и расхода жидкости при гидроразрыве (см., например, [4 — 7] и ссылки там). Для многих материалов обнаружилось возрастание вязкости разрушения K_{Ic} , которая в этом случае называется кажущейся вязкостью разрушения и обозначается K_Q , при увеличении длины трещины даже при атмосферном давлении [8 — 10]. Это возможно, если помимо размера трещины существует, по крайней мере, еще один параметр размерности длины, характеризующий разрушение на кончике трещины. Существование такого параметра противоречит ЛУМР.

С точки зрения геофизических приложений особый интерес представляют исследования разрушения образцов горных пород при высоких всесторонних давлениях. Еще в 1966 г. Перкинс и Креч [11] обратили внимание на возрастание сопротивления разрушению при высоких всесторонних давлениях, которое в соответствии с теорией Гриффитса [12] было интерпретировано как возрастание поверхностной энергии. Последующие систематические исследования, выполненные с использованием различных экспериментальных конфигураций (обычная схема трехточечного изгиба в камере высокого давления [13], гидроразрыв толсто-стенного цилиндра, подвергнутого внешнему и внутреннему давлению [14 — 16], так называемая схема компактного растяжения (расклинивание первоначальной прорези) [16], позволяющая получать надежные кривые нагрузка — смещение, гидроразрыв трещин, имеющих дискообразную форму [17]), показали, что с увеличением всестороннего давления наблюдается практически линейный рост K_{IC} , что невозможно объяснить с точки зрения ЛУМР. При этом в диапазоне давлений, соответствующих глубине 1—2 км, наблюдалось возрастание прочности более, чем в два раза. Иначе говоря, даже для хрупкого слоя коры (глубины до 10—15 км) в приближении ЛУМР, т. е. не детализируя процессов деформации материала, происходящих в окрестности кончика трещины, невозможно получить адекватное описание процесса разрушения горных пород.

Как продемонстрировали Инграффеа [18] и Рубин [19], удобным инструментом исследования задач о разрушении горных пород является модель Дагдейла — Баренблатта (ДБ) [20, 21], в которой предполагается, что раскрытию трещины отрыва противодействуют когезионные силы σ_T , действующие в сплошном материале в тонкой ОНД, являющейся продолжением трещины (см. рис. 1). Фактически предполагается, что эти силы зависят от раскрытия трещины δ , т. е. от расстояния между стенками будущей трещины: $\sigma_T = \sigma_T(\delta)$, причем нарушение сплошности материала происходит, когда раскрытие трещины превышает критическое значение δ_c .

Эту же модель можно использовать и для описания трещин сдвига. В последнем случае роль критического раскрытия играет критическое относительное смещение берегов трещины D_c , по достижении которого напряжение сдвига на берегах трещины падает от когезионного

τ_T до напряжения трения $\tau_f = k_i \sigma_n$, где σ_n — эффективное нормальное напряжение (нормальное напряжение минус поровое давление), а k_i — коэффициент трения. В применении к трещинам сдвига ДБ модель называют также моделью скольжения с разупрочнением. Ида [22] использовал эту модель для решения задачи о распространении динамических трещин продольного сдвига в предположении, что сопротивление разрушению локализовано в окрестности кончика трещины. Чен и Кнопов [23] рассмотрели вопрос о равновесии трещин поперечного сдвига в модели скольжения с разупрочнением. Костров и Дас [24] исследовали возможность коалесценции системы сдвиговых трещин, расположенных в одной плоскости, и связанного с этим предсейсмического скольжения. Обзор других аспектов применения модели скольжения с разупрочнением можно найти в монографии Райса [25].

Немаловажным достоинством ДБ модели является то, что она рассматривает трещины, берега которых на кончике сходятся под нулевым углом в согласии с формой реальных трещин. Ее экспериментальным основанием являются исследования Дагдейлом [20] неупругих деформаций, сопровождающих квазистатическое распространение трещин отрыва в металлических пластинах. В применении к горным породам аналогичные результаты получил Свенсон [26], который при непосредственных ультразвуковых наблюдениях процесса разрушения в пластинах гранита Вестерли обнаружил ОНД длиной 15—40 мм и толщиной 1—2 зерна (размеры зерен около 0,75 мм), вытянутую в направлении распространения трещины.

Теоретическим основанием модели можно считать численные расчеты формы пластической области вблизи кончика трещины отрыва в упругопластической пластине в условиях плоского напряженного состояния [27]. Согласно этим расчетам пластическая зона перед кончиком трещины действительно вытянута вдоль плоскости трещины (отношение длины зоны к ее полуширине примерно 2,5) в согласии с ДБ моделью.

К трудностям модели можно отнести тот факт, что, как показали численные расчеты [28], в условиях плоской деформации, которые, видимо, лучше соответствуют реальной ситуации в твердой Земле, чем плоское напряженное состояние, пластическая область вблизи кончика трещины отрыва в идеальном упругопластическом материале имеет форму эллипса, большая полуось которого перпендикулярна плоскости

трещины, а отношение осей равно пяти. Близкие результаты получили также авторы работы [29].

Несмотря на то, что природу когезионных сил нельзя считать выясненной, а вопрос о том, какой из предельных случаев — плоская деформация или плоское напряженное состояние — лучше соответствует условиям в Земле, остается открытым, ДБ модель (известная также, как *tension-softening model*) в настоящее время широко используется как для представления результатов экспериментов по разрушению горных пород (вместо значений эффективной вязкости разрушения K_c приводятся зависимости $\sigma_T(\delta)$), так и для их интерпретации (см., например, [16, 30]). При этом из экспериментальных данных для гранита следует, что вид кривой $\sigma_T(\delta)$ не зависит от всестороннего давления вплоть до давления, по крайней мере, 26,5 МПа [16], хотя реинтерпретация измерений [16] авторами работы [30] поставила это заключение под сомнение.

Далее будет показано, что собственно прочность горных пород, а следовательно и когезионные силы, начиная уже с весьма небольших глубин не играет заметной роли в процессах распространения трещин гидро-, магморазрыва. Тем не менее ДБ модель — удобный метод решения задач распространения трещин в Земле, если соответствующим образом учитывать факторы, имитирующие прочностные характеристики.

Ниже получены точные решения для трещин растяжения и сдвига в ДБ модели в неограниченном теле. В предположении идеальной пластичности в ОНД, т.е. при $\sigma_T = \text{const}$, эти решения сопоставлены с лабораторными исследованиями разрушения образцов горных пород при нулевом и высоком всестороннем давлении. Получены критерии разрушения для трещин гидро-, магморазрыва при высоких всесторонних давлениях и показано, как рассчитывать энергию разрушения в ДБ модели.

Особую роль в ДБ модели играет критическая длина трещины, равная по порядку величины $\delta_c \mu / \sigma_T$ (μ — модуль сдвига), составляющая для известняков и гранитов при атмосферном давлении 3—10 см и убывающая обратно пропорционально всестороннему давлению, если давление превышает когезионное напряжение. Если длина открытой части трещины велика по сравнению с критической длиной, то решения в ДБ модели, в общем, совпадают с результатами ЛУМР (во всяком случае, при ну-

левом всестороннем давлении). Для микротрещин, т.е. для трещин, длина открытой части которых мала по сравнению с критической длиной, а полная длина практически совпадает с размером когезионной зоны, ЛУМР не применима даже при атмосферном давлении. Если при лабораторных экспериментах размеры образца меньше критической длины, то когезионная зона в процессе нагружения выходит на границы тела и прочностные характеристики определяются с большой погрешностью. С точки зрения геофизических приложений существенно, что полная длина микротрещин гидро-разрыва порядка критической длины, которая может быть намного больше размера их открытой части. Взаимодействие между микротрещинами становится заметным, когда характерное расстояние между ними порядка их полной длины. В этом случае может возникать связанная система трещиноватости, что оказывает определяющее влияние на динамику, например областей частичного плавления и коллекторов углеводородов.

2. Точные решения для двумерной ДБ трещины гидро/магморазрыва в безграничном теле. Следуя [31], рассмотрим двумерную трещину длины $2a$ в бесконечном упругом теле, находящемся в условиях всестороннего давления $p_\infty > 0$ (рис. 1). Будем считать, что трещина находится в состоянии предельного равновесия, т.е. бесконечно малое увеличение внутреннего давления привело бы к ее страгиванию. На участках длиной Δ_T вблизи кончиков трещины $a - \Delta_T < |x| < a$ действуют когезионные напряжения $\sigma(x) = \sigma_T$, препятствующие раскрытию трещины давлением заполняющей ее жидкости p , приложенным к внутренней поверхности $|x| < a - \Delta_T$. Приближенно учтем возможную зависимость давления жидкости на стенки трещины от координат (например, вследствие вязкого торможения при течении жидкости по трещине или вследствие того, что жидкость не проникает в участки трещины, непосредственно примыкающие к ее кончикам), приняв, что на участках длиной Δ_S вблизи кончиков трещины давление меньше, чем в ее центральной части $p_S \leq p$. Таким образом, принимаются следующие граничные условия:

$$\sigma(x) = \begin{cases} -p, & 0 < |x| < a - (\Delta_T + \Delta_S), \\ -p_S, & a - (\Delta_T + \Delta_S) < |x| < a - \Delta_T, \\ \sigma_T, & a - \Delta_T < |x| < a. \end{cases} \quad (1)$$

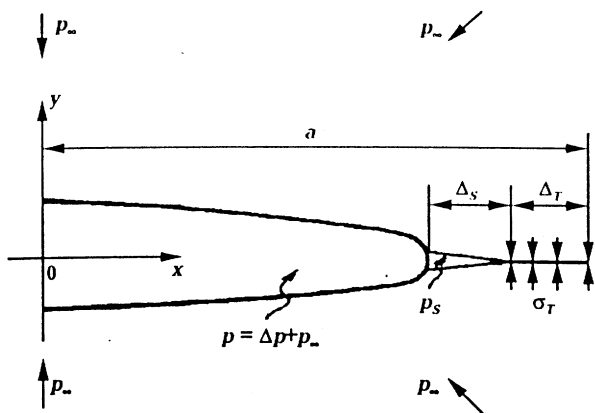


Рис. 1. Двумерная трещина длиной $2a$ в безграничном упругом теле, подвергнутом всестороннему сжатию p_∞ . Δ_T — когезионная зона, на которой действуют когезионные напряжения σ_T . Давление жидкости p приложено к внутренней поверхности трещины на участке $|x| < a - (\Delta_T + \Delta_S)$. Перед фронтом жидкости имеется участок длиной Δ_S , в который жидкость не проникает. Здесь действует давление $p_S \leq p$. В основании когезионной зоны ($x = a - \Delta_T$) раскрытие трещины равно критическому δ_c .

Поскольку эти граничные условия симметричны, решения полученные ниже, относятся к горизонтальной трещине или к трещине, в которой изменения гидростатического давления малы по сравнению с давлением жидкости p .

Как известно, в двумерной задаче напряжения и смещения в общем случае могут быть выражены через две аналитические функции комплексной переменной $z = x + iy$ (см., например, [32]). Симметрия задачи позволяет исключить одну из них, так что все величины могут быть выражены через одну аналитическую функцию $\varphi(z)$. В частности, в условиях плоской деформации [32]

$$\sigma_{yy} = 2(\operatorname{Re} \varphi' + y \operatorname{Im} \varphi''), \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = -2y \operatorname{Re} \varphi'', \quad (3)$$

$$\mu u_y = 2(1 - \nu) \operatorname{Im} \varphi - y \operatorname{Re} \varphi'. \quad (4)$$

Здесь u_y — смещение по оси Y , μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, Re и Im означают вещественную и мнимую части соответственно.

Функция $\varphi'(z)$ аналитична в верхней полуплоскости и удовлетворяет следующим граничным условиям на вещественной оси и в бесконечности:

$$\operatorname{Re} \varphi' = \sigma(x)/2 \quad \text{при } |x| < a, \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} \varphi' = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad (6)$$

$$\varphi'(z) \rightarrow -p_\infty/2 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Второе из этих условий следует из равенства нулю смещений u_y на вещественной оси.

Явный вид функции $\varphi'(z)$, аналитической в верхней полуплоскости и удовлетворяющей граничным условиям (5)–(7), дается формулой Келдыша — Седова [33]:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = & \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^a \sigma(t) \sqrt{\frac{t-a}{t+a}} \frac{dt}{t-z} - \\ & - \frac{p_\infty}{2} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} + \frac{\gamma_0}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

При $|z| \rightarrow \infty$

$$\varphi'(z) \rightarrow -\frac{1}{2\pi i |z|} \int_{-a}^a dt \sigma(t) \sqrt{\frac{t-a}{t+a}} - \frac{p_\infty}{2} - \frac{ap_\infty - \gamma_0}{|z|}.$$

На бесконечности u_y возрастает линейно, так что $\varphi(z)$ не должно содержать логарифмических членов. Это условие позволяет определить постоянную γ_0 . В итоге получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = & \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^a \sigma(t) \sqrt{\frac{t-a}{t+a}} \frac{dt}{t-z} - \\ & - \frac{p_\infty}{2} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} + \frac{a}{2\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sigma(t) + p_\infty}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

В ДБ модели напряжения всюду конечны. В непосредственной близости от кончика, т.е. при $z = a + \zeta$ ($\operatorname{Im} \zeta = 0$; $0 < \zeta \ll a$), из (9) и (2) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(a + \zeta) = & -\frac{a}{\pi \sqrt{2a\zeta}} \int_{-a}^a \frac{\sigma(t) + p_\infty}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt + \sigma_T - \\ & - \frac{2}{\pi} (p - p_S) \sqrt{\frac{\zeta}{\Delta_S + \Delta_T}} - \frac{2}{\pi} (\sigma_T + p_S) \sqrt{\frac{\zeta}{\Delta_T}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, условие отсутствия сингулярности на кончике трещины имеет вид

$$\int_{-a}^a \frac{\sigma(t) + p_\infty}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = 0. \quad (11)$$

Из (10) следует также, что при выполнении условия (11) нормальные напряжения вблизи кончика трещины

$$\sigma_{yy}(a + \zeta) = \sigma_T + O(\zeta^{1/2}).$$

При кусочно-постоянном распределении напряжений вдоль трещины (1), подразумеваемом идеальную пластичность в когезионной зоне $\sigma_T = \text{const}$, интеграл в (11) легко вычисляется, так что условие предельного равновесия тре-

щины гидро-, магморазрыва может быть записано в виде

$$\Delta p \arcsin S = (p_\infty - p_S) \arccos S + (\sigma_T + p_S) \arccos T, \quad (12)$$

где $\Delta p = p - p_\infty$ — избыточное давление, $S = 1 - (\Delta_S + \Delta_T)/a$ и $T = 1 - \Delta_T/a$.

Чтобы найти раскрытие трещины, заметим, что из (4) следует, что $u_y(x)$ можно искать как решение дифференциального уравнения

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{2(1-\nu)}{\mu} \operatorname{Im} \phi \Big|_{y=0}$$

с начальным условием $u_y(-a) = 0$.

Вводя вместо смещений раскрытие трещины, получаем

$$\delta(x) = 2u_y = \frac{2(1-\nu)a}{\pi\mu} [(p-p_S)I(X,S) + (\sigma_T + p_S)I(X,T)], \quad (13)$$

где $X=x/a$,

$$I(U,V) = - \int_U^1 d\tau (\sqrt{1-\tau^2})^V \int_{-\nu(t-\tau)}^{\nu} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$I(U,V) = (V+U) \ln \left| \frac{\sqrt{(1-U^2)(1-V^2)} + 1 + UV}{V+U} \right| + (V-U) \ln \left| \frac{\sqrt{(1-U^2)(1-V^2)} + 1 - UV}{V-U} \right|. \quad (14)$$

График функции $I(U,V)$ приведен на рис. 2. Раскрытие трещины в основании ОНД

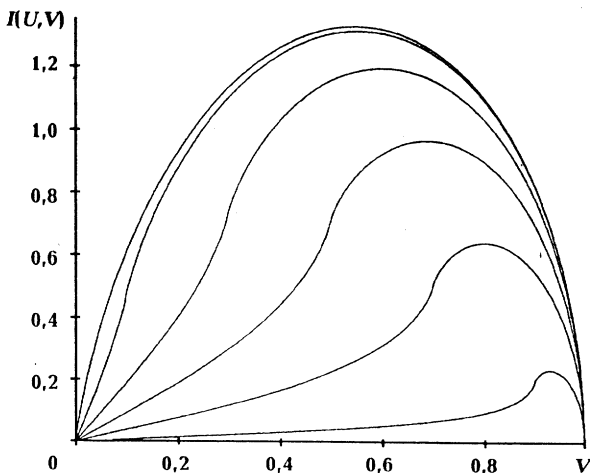


Рис. 2. График функции $I(U,V)$. Верхняя кривая соответствует значению $U=0$. На остальных кривых (сверху вниз) U равно соответственно 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9.

$$\delta(a - \Delta_T) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} a [(p - p_S)I(T,S) + 2(\sigma_T + p_S)T \ln(l/T)], \quad (15)$$

а раскрытие трещины в центре ($x=0$)

$$\delta_{\max} = \frac{4(1-\nu)}{\pi\mu} a \left[(p - p_S)S \ln \frac{1 + \sqrt{1-S^2}}{S} + (\sigma_T + p_S)T \ln \frac{1 + \sqrt{1-T^2}}{T} \right]. \quad (16)$$

Объем трещины, отнесенный к слою единичной толщины,

$$V = \int_{-a}^a \delta(x) dx = \frac{2(1-\nu)a^2}{\mu} [(p - p_S)S \sqrt{1-S^2} + (\sigma_T + p_S)T \sqrt{1-T^2}]. \quad (17)$$

В частных случаях эти решения несколько упрощаются.

Если жидкость заполняет всю открытую часть трещины ($\Delta_S=0_T$), то $p_S = p$, так что вместо (12), (15) — (17) получаем

$$\Delta p \arcsin T = (\sigma_T + p_\infty) \arccos T, \quad (18)$$

$$\delta(a - \Delta_T) = \frac{4(1-\nu)}{\pi\mu} l (\sigma_T + p) \ln \frac{l}{T}, \quad (19)$$

$$\delta_{\max} = \frac{4(1-\nu)}{\pi\mu} l (\sigma_T + p) \ln \frac{1 + \sqrt{1-T^2}}{T}, \quad (20)$$

$$V = \frac{2(1-\nu)al}{\mu} (p + \sigma_T) \sqrt{1-T^2}, \quad (21)$$

где l — полудлина открытой части трещины $l = a - \Delta_T$, $T = l/a$.

Для трещины, находящейся на пределе страгивания, $\delta(a - \Delta_T) = \delta_c$. Если теперь ввести критическую длину трещины

$$l^* = \frac{\pi\mu}{4(1-\nu)\sigma_T} \delta_c, \quad (22)$$

то уравнение (19) можно записать в следующем виде:

$$\frac{l^*}{l} = \left(1 + \frac{p}{\sigma_T} \right) \ln \frac{a}{l}. \quad (23)$$

Критическая длина является естественным масштабом для длины трещины. Как видно из (23), при $l \ll l^* / (1 + p/\sigma_T)$ полудлина открытой

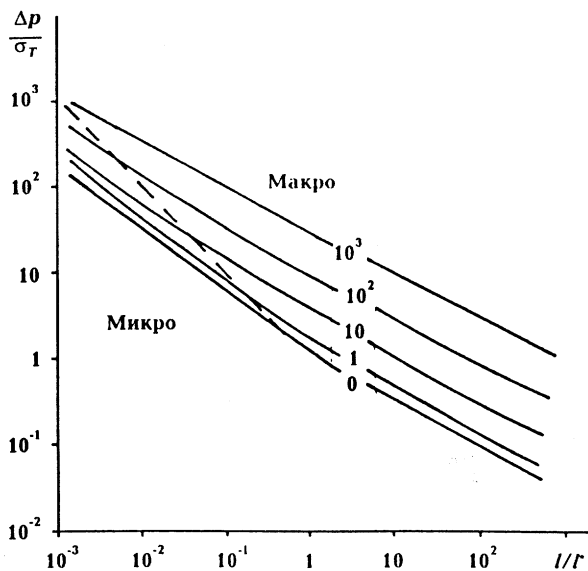


Рис. 3. Зависимость безразмерного избыточного давления $\Delta p/\sigma_T$ в трещине, заполненной жидкостью до основания когезионной зоны и находящейся на пределе страгивания, от длины открытой части трещины l/Γ и всестороннего давления (сплошные кривые). Значения безразмерного всестороннего давления p_∞/σ_T показаны на кривых. Штриховая линия $a/l=2$ разделяет области микро- и макротрещиноватости.

части равновесной трещины l мала по сравнению с ее полной полудлиной a , включающей длину когезионной зоны. Трещины, для которых $\Delta_T \geq l$ или $a \geq 2l$, будем называть микро-трещинами. На рис. 3, 4 показаны зависимости избыточного давления $\Delta p/\sigma_T$ и размера когезионной зоны Δ_T/l^* от длины открытой части и всестороннего давления для трещин, заполненных жидкостью до основания когезионной зоны. Для таких трещин можно вместо критической длины Γ ввести критическую длину

$$l^*(p_\infty) = \frac{l^*}{(1 + p_\infty/\sigma_T)}. \quad (24)$$

Тогда полная полушина трещины, заполненной до основания когезионной зоны ($\Delta_S = \Delta_T$), нормированная на $l^*(p_\infty)$, может быть найдена из уравнения

$$l/l^*(p_\infty) = 2 \frac{\arcsin \frac{l}{a}}{\ln \frac{a}{l}} \quad (25)$$

и вообще не зависит от давления. На рис. 5 показана зависимость полной полушины трещины, заполненной до основания когезионной зоны, от полушины ее открытой части. Из рисунка видно, что для микро-трещин, т. е. при $a/l > 2$ или

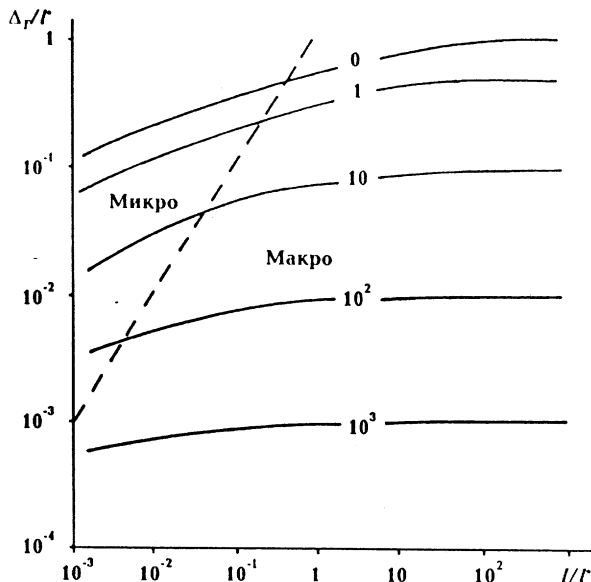


Рис. 4. Зависимость безразмерной длины когезионной зоны Δ_T/l^* в трещине, заполненной жидкостью до основания когезионной зоны и находящейся на пределе страгивания, от длины открытой части трещины l/Γ и всестороннего давления (сплошные кривые). Значения безразмерного всестороннего давления p_∞/σ_T показаны на кривых. Штриховая линия $a/l=2$ ($\Delta_T=l$) разделяет области микро- и макротрещиноватости.

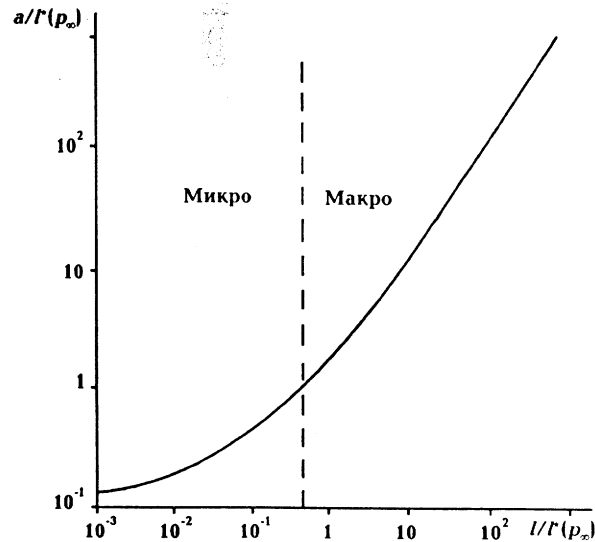


Рис. 5. Зависимость полной полушины a трещины, заполненной жидкостью до основания когезионной зоны, от длины ее открытой части l . Обе величины нормированы на эффективную критическую длину $l^*(p_\infty)$. Штриховая линия $l/l^*(p_\infty) = 1/3 \ln 2$ (или $a/l=2$) разделяет области микро- и макротрещиноватости.

$l/l^*(p_\infty) < 1/3 \ln 2$, полная полушина трещины порядка $l^*(p_\infty)$ и медленно убывает при уменьшении полушины открытой части $l/l^*(p_\infty)$.

В частном случае большой трещины

$$(\Delta_T, \Delta_S \ll a)$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{8}{\pi^2 a}} \left((p_\infty - p_S) \sqrt{\Delta_T + \Delta_S} + (\sigma_T + p_S) \sqrt{\Delta_T} \right), \quad (26)$$

$$\delta(a - \Delta_T) \frac{\pi \mu}{4(1-\nu)} = (\sigma_T + p_S) \Delta_T + (p - p_S) \times \left\{ \sqrt{\Delta_T (\Delta_S + \Delta_T)} - \frac{\Delta_S}{2} \ln \frac{\sqrt{\Delta_T (\Delta_S + \Delta_T)} + 2\Delta_T + \Delta_S}{\Delta_S} \right\} \quad (27)$$

$$\delta_{\max} = \frac{4\sqrt{2a}(1-\nu)}{\pi \mu} \times \left((p - p_S) \sqrt{\Delta_T + \Delta_S} + (\sigma_T + p_S) \sqrt{\Delta_T} \right) \quad (28)$$

Из (26) следует, в частности, что в предельном случае большой трещины и не очень малых всесторонних давлений ($p_\infty \geq \sigma_T$) избыточное давление Δp мало по сравнению со всесторонним давлением $\Delta p \propto p_\infty \sqrt{(\Delta_S + \Delta_T)/a}$, так что $p \approx p_\infty$. Сравнивая (26) и (28), находим, что здесь

$$\delta_{\max} = \frac{2(1-\nu)}{\mu} a \Delta p, \quad (29)$$

а объем трещины, отнесенный к слою единичной толщины,

$$V = \frac{\pi(1-\nu)}{\mu} a^2 \Delta p. \quad (30)$$

В том же предельном случае получаем для большой трещины, заполненной жидкостью до самого основания когезионной зоны ($\Delta_S = 0, \Delta_T \ll a$):

$$\Delta p = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2\Delta_T}{a}} (\sigma_T + p_\infty), \quad (31)$$

$$\delta(a - \Delta_T) = \frac{4(1-\nu)}{\pi \mu} \Delta_T (\sigma_T + p_\infty), \quad (32)$$

$$\delta_{\max} = \frac{4(1-\nu)}{\pi \mu} a (\sigma_T + p) T \ln \frac{1 + \sqrt{1 - T^2}}{T}. \quad (33)$$

Из (32) следует, что для большой трещины, находящейся на пороге страгивания ($\delta(a - \Delta_T) = \delta_c$), размер когезионной зоны убывает с увеличением всестороннего давления

$$\Delta_T = l^* \frac{\sigma_T}{\sigma_T + p_\infty} \quad (34)$$

но при этом не зависит от длины трещины. Таким образом, при распространении больших трещин поле напряжений в окрестности кончика переносится без изменения его структуры.

3. Трещина продольного и поперечного сдвига в ДБ модели. Задача, рассмотренная ниже, фактически совпадает с задачей о равновесии трещины продольного сдвига, рассмотренной Ченом и Кноповым [23]. Однако метод решения, использованный ниже, является более общим (Чен и Кнопов использовали преобразование Фурье для решения соответствующего уравнения Лапласа и ограничились рассмотрением двух моделей — линейной зависимости когезионных напряжений от координат и линейной зависимости когезионных напряжений от смещения), а результаты являются более прозрачными.

Рассмотрим трещину поперечного сдвига, расположенную на оси абсцисс, с условиями на бесконечности $\sigma_{xy}(\infty) = \tau_\infty, \sigma_{xx}(\infty) = \sigma_{yy}(\infty) = 0$. Будем считать, что на берегах трещины вблизи ее кончиков $a - \Delta_T < |x| < a$ действуют когезионные напряжения $\tau_T = \sigma_T + k_i \sigma_n$, где k_i — коэффициент внутреннего трения, σ_n — нормальные напряжения на трещине, а на остальной части трещины — сдвиговые напряжения $\tau(x)$, которые ниже будут полагаться равными напряжениям трения τ_f . Из соображений симметрии на оси абсцисс $\sigma_{yy} = 0$. Как и в случае трещины растяжения это позволяет выразить напряжения и перемещения через одну аналитическую функцию

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -2(\text{Im}\phi' + y\text{Re}\phi''), \\ \mu u_x &= 2(1-\nu)\text{Re}\phi + \text{Im}\phi. \end{aligned} \quad (35)$$

Если в (35) сделать замену $\phi = -i\phi_1$, то оказывается, что σ_{xy} и u_x в задаче о трещине сдвига при $y=0$ выражаются через ϕ_1 точно так же, как σ_{yy} и u_y выражаются через ϕ в задаче о трещине растяжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= 2(\text{Re}\phi_1' - y\text{Im}\phi_1''), \\ \mu u_x &= 2(1-\nu)\text{Im}\phi_1 - y\text{Re}\phi_1'. \end{aligned} \quad (36)$$

С точностью до обозначений совпадают и граничные условия

$$\phi_1' \rightarrow \frac{\tau_\infty}{2}, |z| \rightarrow \infty;$$

$$\text{Re}\phi_1' \Big|_{y=0} = \frac{1}{2} \tau(x), \quad x < a,$$

$$\text{Im} \varphi'_1 \Big|_{y=0} = 0, \quad |x| > a.$$

Таким образом, решения для φ_1 и φ совпадают с точностью до замены $-p_\infty \rightarrow \tau_\infty$. Поэтому

$$\varphi'_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^a \tau(t) \sqrt{\frac{t-a}{t+a}} \frac{dt}{t-z} + \frac{\tau_\infty}{2} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}.$$

Условие отсутствия сингулярности на кончике

$$\int_{-a}^a \frac{\tau(t) - \tau_\infty}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = 0. \quad (37)$$

Относительные смещения берегов трещины

$$D(x) = 2u_x = \frac{2(1-\nu)a}{\pi\mu} \int_{x/a}^1 d\xi \sqrt{1-\xi^2} \int_{-1(t-\xi)\sqrt{1-\xi^2}}^1 \frac{\tau(t) dt}{-1(t-\xi)\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Задавая $\tau(t)$ в виде

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_f, & |t| < 1 - \Delta_T/a, \\ \tau_T, & 1 - \Delta_T/a < |t| < a, \end{cases} \quad (38)$$

где τ_f — напряжение трения, получаем

$$D(x) = \frac{2(1-\nu)a}{\pi\mu} (\tau_T - \tau_f) I(X, T), \quad (39)$$

где $X = x/a, T = 1 - \Delta_T/a$. Функция $I(U, V)$ дается уравнением (14).

Теперь из условия отсутствия сингулярности (37) следует

$$\frac{l}{a} = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau_T - \tau_\infty}{\tau_T - \tau_f} \right) \quad (40)$$

($l = a - \Delta_T$ — полудлина открытой части трещины),

$$\frac{\Delta_T}{a} = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} \frac{\tau_\infty - \tau_f}{\tau_T - \tau_f} \right), \quad (41)$$

а из условия $D(a - \Delta_T) = D_c$

$$\frac{l^*}{l} = \ln \frac{a}{l}, \quad (42)$$

где $l^* = \frac{\pi\mu D_c}{4(1-\nu)(\tau_T - \tau_f)}$ — критическая длина трещины для сдвига.

Из (40) и (42) следует

$$\tau_T - \tau_\infty = \frac{2}{\pi} (\tau_T - \tau_f) \arcsin \exp \left(- \frac{l^*}{l} \right). \quad (43)$$

Если $l \ll l^*$, то $a \gg l$ (из (42)) и условие предельного равновесия будет таковым: $\tau_\infty \approx \tau_T$. Если $l \gg l^*$, то $a \approx l$ и

$$\tau_\infty - \tau_f = \frac{2}{\pi} (\tau_T - \tau_f) \sqrt{\frac{2l^*}{l}}.$$

Если $\tau_\infty < \tau_f$, то в (43) левая часть больше правой, т.е. трещина распространяться не может. При увеличении внешних сдвиговых напряжений первыми активизируются наибольшие благоприятно ориентированные трещины. По трещине длины l подвижка начинается после достижения критического напряжения

$$\tau_{\text{crit}}(l) = \tau_T - \frac{2}{\pi} (\tau_T - \tau_f) \arcsin \exp \left(- \frac{l^*}{l} \right). \quad (44)$$

При $l \gg l^*$ критическое значение напряжения

$$\tau_{\text{crit}}(l) = \tau_f + \frac{2}{\pi} (\tau_T - \tau_f) \sqrt{\frac{2l^*}{l}}, \quad (45)$$

т.е. лишь незначительно превышает напряжение трения.

Если в теле все благоприятно ориентированные трещины не превосходят некоторого максимального размера $l \leq l_{\text{max}}$, то разрушение начинается, когда напряжения достигают значения $\tau_\infty = \tau_{\text{crit}}(l_{\text{max}})$. Как только трещина начала распространяться, ее длина возрастает и, как видно из (44), (45), соответствующее критическое напряжение уменьшается. Если при этом внешнее напряжение остается прежним, то распространение трещины продолжается, т.е. процесс распространения трещин сдвига при фиксированной внешней нагрузке имеет катастрофический характер.

Если принять, что трещина останавливается, когда внешнее напряжение падает до напряжения трения, то величина $\Delta\sigma = \tau_{\text{crit}} - \tau_f$ представляет собой сброс напряжений при землетрясении. Как следует из (44), ДБ модель предсказывает зависимость сброса напряжений от длины исходной трещины:

$$\Delta\sigma = \frac{2}{\pi} (\tau_T - \tau_f) \arccos \exp \left(- \frac{l^*}{l} \right). \quad (46)$$

Из (46) следует, что сейсмический сброс напряжений $\Delta\sigma \propto l^{-1/2}$ при $l \gg l^*$ и стремится к $\tau_T - \tau_f$ при $l \ll l^*$. Это предсказание допускает экспериментальную проверку.

Для трещины продольного сдвига (антиплоская деформация) напряжения и перемещения

также представляются через одну аналитическую функцию [32]:

$$\sigma_{yz} = -\text{Im } \varphi'(z),$$

$$\mu(1-\nu)u_z = (1-\nu)\text{Re } \varphi(z).$$

Сделав здесь замену $\varphi = -2i\varphi_2$, находим, что в плоскости трещины напряжения σ_{yz} и $(1-\nu)u_z$ выражаются через $\varphi_2(z)$ точно так же, как в задаче о трещине поперечного сдвига σ_{xy} и u_x выражаются через $\varphi_1(z)$. Граничные условия для функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ формально также совпадают. Поэтому все выражения (37)–(46) справедливы и для трещины продольного сдвига, если считать, что сдвиг происходит вдоль оси Z , так что сдвиговые напряжения направлены вдоль Z , а смещения $D(x) = 2u_z$. При этом во всех выражениях для смещений (включая выражение для критической длины трещины) следует опустить множители $1-\nu$.

4. Пустая трещина в поле растяжения при атмосферном давлении. Эффективность модели продемонстрируем на примере пустой трещины в поле растяжения при атмосферном давлении — случае, который хорошо исследован экспериментально. Сравнение модели с лабораторными данными позволит, в частности, оценить значения феноменологических параметров.

При лабораторных исследованиях [10] измерялось значение напряжения растяжения, соответствующее страгиванию трещины, а затем рассчитывался критический коэффициент интенсивности напряжений K_Q , который в этом случае называется кажущейся вязкостью разрушения и, как выяснилось, в противоречии с ЛУМР зависит от длины трещины. В ДБ модели решение можно получить непосредственно из условия отсутствия сингулярности на кончике трещины (11) или положив формально в (12) $p_\infty = -\sigma_\infty$ (σ_∞ — растягивающие напряжения), $p = p_S = 0$, $\Delta p = \sigma_\infty$, $\Delta_S = a - \Delta_T$. Вводя помимо полной полудины трещины a полудину ее открытой части $l = a - \Delta_T$, находим из (12) и (23)

$$\sigma_\infty = \frac{2}{\pi} \sigma_T \arccos \frac{l}{a}, \quad (47)$$

$$\frac{l^*}{l} = \ln \frac{a}{l}. \quad (48)$$

Если теперь определить K_Q так же, как это делается в ЛУМР:

$$K_Q = \sigma_\infty \sqrt{\pi l},$$

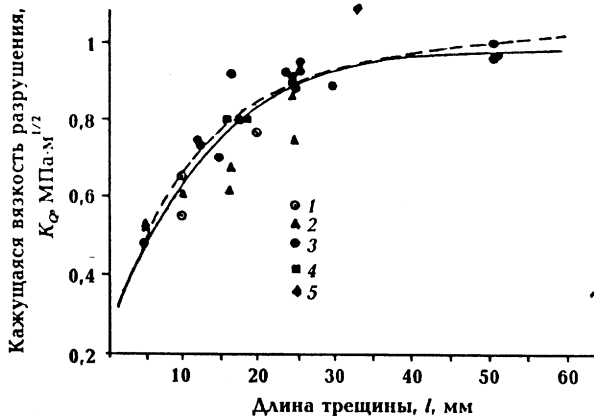


Рис. 6. Зависимость кажущейся вязкости разрушения K_Q для пустой трещины в известняке при атмосферном давлении от длины открытой части трещины l : 1 — пластинка с надрезом в центре [10]; 2 — на двух кромках [10]; 3 — трехточечный изгиб [9]; 4 — толстостенный цилиндр [14]; 5 — короткий стержень [44]. Штриховая линия — уравнение (49) при $\sigma_T = 3,8$ МПа и $l^* = 34$ мм; сплошная линия — аппроксимация данных в работе [10].

то из (47), (48) получаем

$$K_Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_T \sqrt{l \arccos \exp\left(-\frac{l^*}{l}\right)}. \quad (49)$$

Из (49) следует, что при $l \gg l^*$

$$K_Q \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_T \sqrt{2l^*} = \text{const.}$$

В противоположном предельном случае $l \ll l^*$ получаем $K_Q \approx \sigma_T \sqrt{\pi l}$.

На рис. 6 приведены результаты измерения K_Q для известняка [10]. Штриховой линией показана зависимость (49) $K_Q(l)$ для $\sigma_T = 3,8$ МПа и $l^* = 34$ мм. Хорошее согласие с измерениями подтверждает эффективность ДБ модели для практических расчетов. Полученные данные позволяют оценить критическое раскрытие трещины $\delta_c = 0,01$ мм. Эта оценка согласуется с результатами численного моделирования [30] экспериментов Абу-Сайеда [14, 15] при нулевом всестороннем давлении $\delta_c = 0,005 + 0,01$ мм. Для гранита прямые измерения Хашида и других [16] позволили получить явный вид зависимости $\sigma_T(\delta)$: при нулевом всестороннем давлении когезионные напряжения убывают от максимального значения $\sigma_{T \max} = 7$ МПа при нулевом раскрытии до нуля при раскрытии примерно 0,05 мм. (Если принять в качестве оценки критического раскрытия $\delta_c = 0,025$ мм и модуль Юнга 60 ГПа [16], то можно оценить критическую длину для гранита $l^* = 9$ см.) Оценка кри-

тического раскрытия трещины подчеркивает феноменологический характер ДБ модели и ее параметров, так как когезионная зона предполагается бесконечно тонкой, в то время как значение критического раскрытия на много порядков превышает постоянную решетки горных пород. В то же время полученное значение представляется вполне осмысленным с физической точки зрения. Действительно, если принять, что разрушение происходит по достижении деформации 1—3%, то оказывается, что толщина разрушающегося слоя 0,3—1 мм. Это как раз толщина межкристаллитных слоев. Так что вполне может быть, что экспериментально определяемые параметры модели просто отражают кристаллическую структуру горных пород. Если это верно, то должна наблюдаться корреляция между значениями экспериментально определяемого критического раскрытия или критической длиной трещины и характерными размерами зерен кристаллической структуры. Насколько известно авторам, пока таких измерений не существует.

В рамках ЛУМР критический коэффициент разрушения K_c является материальной константой и, в частности, не зависит от длины трещины. Как видно из рис. 6, это справедливо только для больших трещин. Условие предельного равновесия микротрещин $l \leq l^*$ даже при нулевом всестороннем давлении зависит от длины трещины в противоречии с ЛУМР. Как видно из (48), с точки зрения ДБ модели это связано с экспоненциальным возрастанием размера когезионной зоны при уменьшении длины трещины:

$$\Delta_T = a - l = l \left(\exp \frac{l^*}{l} - 1 \right). \quad (50)$$

Из (50) следует, что критическая длина трещины равна длине когезионной зоны в пределе большой трещины $l \gg l^*$. Следовательно, для известняка при $l > l^*$ $\Delta_T \approx 40$ мм. В то же время растяжение, приводящее к страгиванию короткой трещины, $\sigma_\infty \approx \sigma_T$, т.е. перестает зависеть от длины ее открытой части. К такому же заключению пришли Инграфеа и Шмидт, основываясь непосредственно на экспериментальных данных [10 рис. 7]. Это предсказание поддается экспериментальной проверке. Его следствием, вопреки обычным представлениям о том, что нарушения сплошности материала — концентраторы напряжений, является то, что при атмосферном давлении наличие изолированных трещин с размером меньше критиче-

ского $l < l^*$ не влияет на прочность горных пород по отношению к растяжению.

Отметим, что микротрещины гидроразрыва при нулевом всестороннем давлении ведут себя совершенно иначе.

Из (18) и (23) находим

$$\Delta p = \sigma_T \frac{\arccos(l/a)}{\arcsin(l/a)}, \quad (51)$$

$$\frac{l^*}{l} = \left(1 + \frac{\Delta p}{\sigma_T} \right) \ln \frac{a}{l}. \quad (52)$$

Если $a/l \gg 1$, то из (51)

$$\Delta p = \frac{\pi}{2} \sigma_T \frac{a}{l}, \quad (53)$$

так что отношение a/l в этом случае является решением уравнения

$$\frac{a}{l} = \exp \left(\frac{2l^*}{\pi l} \right), \quad (54)$$

откуда следует, что $a \approx 2l^*/\pi$ с точностью до численного коэффициента порядка единицы, медленно убывающего с увеличением l^*/l . Таким образом, хотя длина открытой части микротрещин гидроразрыва при нулевом давлении мала по сравнению с их полной длиной, в отличие от пустых трещин в поле растяжения, полная длина близка к критической длине трещины.

Микротрещины, заполненные жидкостью, могут возникать в областях частичного плавления и углеводородных ловушках. Как видно из (53), изолированные микротрещины, в отличие от больших трещин гидроразрыва, выдерживают весьма высокое избыточное давление. В приповерхностных областях ($p_\infty \leq \sigma_T$, что соответствует глубинам менее 100 м) давление в микротрещинах может, в принципе, достигать нескольких десятков МПа. С другой стороны, размеры когезионных зон таких трещин порядка l^* , т.е. несколько сантиметров. Поэтому при концентрации микротрещин, превышающей $(l^*)^{-3} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ м}^{-3}$, трещины могут существенно взаимодействовать, образуя связанные системы. Это, конечно, весьма грубая оценка. Более точная оценка должна следовать из решения соответствующей трехмерной перколяционной задачи. Подчеркнем, что эти оценки относятся только к трещинам, близким к порогу страгивания. Если давление в трещине мало по сравнению с давлением, соответствующим предельному равновесию, то раскрытие в основании когезионной зоны не достигает критического

и уравнение (54) не выполняется. Например, при $\Delta p \ll \sigma_T$ из (53) следует, что $\Delta_T \approx a\sqrt{2\Delta p/\sigma_T}$, так что длина открытой части трещины l в этом случае близка к ее полной длине a .

На больших глубинах ($p_\infty \gg \sigma_T$, т.е. глубже нескольких сотен метров) внутреннее давление, соответствующее предельному равновесию микротрещины, может быть существенно выше литостатического $\Delta p \approx p_\infty a/l$, а когезионные зоны имеют характерные размеры порядка $l^* \sigma_T/p_\infty$. Если давление жидкости равно предельному, то пористость становится связной, когда концентрация трещин достигает $3 \cdot 10^4 (p_\infty/\sigma_T)^3 \text{ м}^{-3}$. Например, если $p_\infty/\sigma_T = 10$, а микротрещины располагаются по граням зерен, имеют размеры порядка 3 мм и раскрытие 0,01—0,1 мм, то система трещиноватости становится связной при пористости от нескольких десятых процента до нескольких процентов.

5. Энергия разрушения в модели Дагдейла–Баренблатта (трещины растяжения). Под энергией разрушения будем понимать работу по неупругому деформированию слоя единичной толщины, которая совершается при единичном удлинении трещины.

Выберем поверхность S , окружающую часть тела с трещиной и проходящую по (линейно) упругому материалу. Внутренняя поверхность трещины также включена в S . Внутри выделенной области материал всюду упругий, за исключением неупругой области, отделенной от упругой части поверхностью S_{nc} . Неупругая область (когезионная зона) имеет участок, выходящий на внутреннюю поверхность трещины, т.е. лежащий на S . Оставаясь в рамках ДБ модели, будем считать когезионную зону бесконечно тонкой и пренебрегать существованием этого участка. Система находится в равновесии.

Пусть теперь внешние силы совершили над выделенной областью работу δA , в результате чего она перешла в новое, но опять равновесное состояние. Этот переход сопровождается перестройкой границы. На участке ΔS_1 вблизи основания когезионной зоны произошел разрыв сплошности, а на участке ΔS_2 вблизи кончика трещины был превышен порог неупругости и этот участок добавился к S_{nc} . Каждый из участков ΔS_1 и ΔS_2 является двойным — он включает участки верхнего и нижнего бортов трещины. Работа δA расходуется на увеличение упругой энергии δU_e и работу по неупругому деформированию:

$$\delta A = \delta U_e + \delta A_{nc}. \quad (55)$$

δA_{nc} и будем считать работой разрушения: $\delta A_{nc} = \delta A - \delta U_e$. Легко показать, что

$$\delta A_{nc} = - \int_{S_{nc}} dS \sigma_{ik} n_k \delta u_i - \frac{1}{2} \int_{\Delta S_1 + \Delta S_2} (\sigma_{ik}^* + \sigma_{ik}) \delta u_i n_k dS, \quad (56)$$

где σ_{ik} и σ_{ik}^* — старые и новые напряжения соответственно.

В двух наиболее интересных случаях один из интегралов обращается в ноль.

Если разрушение идеально хрупкое, то неупругая область имеет нулевой объем и нулевую поверхность, так что первый интеграл исчезает. Во втором интеграле остается только интегрирование по ΔS_1 . Напряжения на ΔS_1 сингулярны, так что произведение напряжений и перемещений порядка $O(1)$, а весь интеграл порядка $O(\Delta S)$. Это предельный случай ЛУМР. В этом случае энергия разрушения выражается через вязкость разрушения K_{Ic} .

В ДБ модели неупругая область является пластической, напряжения всюду конечны, второй интеграл имеет второй порядок малости $O(\Delta S \delta u_i)$ и может быть опущен. Таким образом, остается только интегрирование по границе когезионной зоны. Если положить

$$\delta u_i = (\partial u_i / \partial a) \delta a, \text{ то } \frac{\delta A_{nc}}{\delta a} = - \frac{1}{2} \int_{S_{nc}} \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial a} dS.$$

Отсюда энергия разрушения, т.е. работа по неупругому деформированию, рассчитанная для слоя единичной толщины,

$$G_c = \int_{a-\Delta_T}^a \sigma_T(x) \frac{\partial \delta(x)}{\partial a} dx, \quad (57)$$

где введено раскрытие трещины $\delta(x) = 2u_y$ и учтено, что в когезионной зоне действуют напряжения растяжения, так что усилия на берегах и перемещения направлены противоположно.

В общем случае производную аналитически вычислить невозможно, так как она должна вычисляться вдоль кривой равновесия. Но в двух предельных случаях — большая трещина, заполненная жидкостью до основания когезионной зоны, или микротрещина в поле растяжения — можно получить замкнутые решения.

Если длина трещины велика по сравнению с критической $l \gg l^*$, то из (32) следует, что длина когезионной зоны не зависит от длины

трещины, т. е. трещина распространяется с сохранением формы неупругой области. При этом $\partial\delta(x)/\partial a = -\delta\delta(x)/\partial x$, так что

$$G_c = \int_0^{\delta_c} \sigma_T(\delta) d\delta. \quad (58)$$

Если $\sigma_T(\delta) = \sigma_T = \text{const}$, то $G_c = \sigma_T \delta_c$.

Выражение (58) совпадает с определением энергии разрушения, полученным при помощи техники J -интеграла [34], описание которой в приложении к горным породам можно найти в работах [16, 35] (см. также ссылки там). В выражении для J -интеграла вместо производной по длине трещины (см. (57)) стоит производная по переменной интегрирования. В случае длинных трещин эти величины, как отмечено выше, совпадают с точностью до знака. В общем случае они различаются. Совпадение упругой энергии, определенной выше, и J -интеграла в пределе длинной трещины неудивительно, так как представление упругой энергии через J -интеграл получено как раз в пределе длинной трещины, когда продвижение трещины сопровождается просто переносом поля напряжений в окрестности кончика без его перестройки (см., например, [32]).

В предположении идеальной пластичности когезионной зоны $\sigma_T(\delta) = \sigma_T = \text{const}$

$$G_c = \sigma_T \frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \delta(x) dx - \sigma_T \int_0^l \frac{\partial}{\partial a} \delta(x) dx. \quad (59)$$

В открытой части микротрещины $\delta(x) = \delta_c = \text{const}$, поэтому второе слагаемое в (59) равно нулю. В первом слагаемом под знаком производной стоит объем трещины (21). Учитывая также (22), получаем

$$G_c = \frac{\pi l}{2l^*} \sigma_T \delta_c. \quad (60)$$

откуда следует, что энергия разрушения для микротрещин зависит от длины трещины и, следовательно, не имеет универсального физического смысла.

В трещинах отрыва разрушение на кончике происходит в условиях абсолютного растяжения. Поэтому можно было бы ожидать, что детали разрушения в ОНД не зависят от всестороннего давления, а энергия разрушения или $\sigma_T(\delta)$ являются материальными константами. Действительно, Хашида и другие [16] на основании экспериментов по разрушению гранитов Иидата заключили, что в диапазоне давлений

0—26,5 МПа зависимость $\sigma_T(\delta)$ не изменяется. Однако анализ распространения промышленных трещин гидроразрыва [36, 37] и полевые исследования эродированных даек [38] указывают на то, что значения энергии разрушения *in situ* значительно выше, чем это следует из лабораторных экспериментов при нулевом давлении. Фиалко и Рубин [30] проанализировали эксперименты [15, 16], для которых опубликованы достаточно полные записи нагрузка — смещение, в терминах ДБ модели, т. е. предполагая, что неупругое деформирование локализовано в тонкой области на продолжении трещины. Они пришли к заключению, что в диапазоне 0—7 МПа для экспериментов Абу-Сайеда [15] и 0—26,5 МПа для экспериментов Хашиды и другие [16] энергия разрушения возрастает примерно в 2 раза. Можно показать, что частично причиной этого роста может быть существование кристаллической структуры, приводящей к тому, что трещина продвигается пошагово с шагом, примерно равным размеру зерна, и ее длина систематически оказывается меньше равновесного значения, соответствующего сплошной однородной среде. Однако большая часть возрастания энергии разрушения связана, вероятно, с тем, что при высоких давлениях микротрещины образуются не только в плоскости, продолжающей трещину, но и вне ее.

Таким образом, основное предположение ДБ модели, в которой принимается, что пластическая зона является тонкой и локализована на продолжении трещины, по-видимому, нарушается при высоких давлениях. В то же время, начиная уже со сравнительно небольших глубин, работа против всестороннего давления становится больше энергии разрушения, так что собственно прочностью пород можно пренебречь. Для трещин растяжения это будет показано в следующем разделе. В итоге методы решения задач, характерные для модели Дагдейла—Барнеблатта, оказываются применимы и при высоких всесторонних давлениях, если вместо когезионных сил или в дополнение к ним принимать во внимание сопротивление разрушению, индуцированное давлением.

6. Прочность горных пород при высоком всестороннем давлении. Решения, приведенные в разделе 2, показывают, что крупномасштабные величины, характеризующие равновесную трещину гидро-, магморазрыва (избыточное давление Δp , раскрытие в центре δ_{max} , а также объем трещины), возрастают с увеличением всестороннего давления p_∞ (или глу-

биной, если речь идет о трещинах в земной коре). Очевидно, что кажущаяся вязкость разрушения, если ввести ее формально как $K_Q = \Delta p \sqrt{\pi a}$, зависит от давления аналогичным образом. В пределе большой трещины ($\Delta_T, \Delta_S \ll a$) и в предположении, что жидкость не проникает до самого основания когезионной зоны ($p_S = 0$), из (24) следует

$$K_Q = \sigma_T \sqrt{\frac{8\Delta_T}{\pi}} + p_\infty \sqrt{\frac{8(\Delta_T + \Delta_S)}{\pi}}. \quad (61)$$

Поучительно сравнить (61) с соответствующим выражением, следующим из ЛУМР. В приближении ЛУМР напряжения на кончике трещины $\sigma_{\text{ип}}$ можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\text{ип}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} - p_\infty, \quad (62)$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений по отношению к растяжению $K_I = \Delta p \sqrt{\pi a}$, а r — радиус кончика. Если трещина находится в состоянии предельного равновесия, то K_I равняется кажущейся вязкости разрушения $K_Q^{\text{ЛУМР}}$ в ЛУМР. С другой стороны, напряжение на кончике в этом случае можно выразить через критический коэффициент интенсивности напряжений K_{Ic} , который считается материальной константой, не зависящей от давления: $\sigma_{\text{ип}} = K_{Ic} / \sqrt{2\pi r}$. Из (62) получаем

$$K_Q^{\text{ЛУМР}} = K_{Ic} + p_\infty \sqrt{2\pi r}. \quad (63)$$

Переписывая (61) в виде

$$K_Q = K_{Ic}^* + p_\infty \sqrt{2\pi \xi_{\text{эф}}}, \quad (64)$$

видим, что $K_{Ic}^* = \sigma_T \sqrt{8\Delta_T/\pi}$ играет роль "вязкости разрушения", а $\xi_{\text{эф}} = 4(\Delta_T + \Delta_S)/\pi^2$ можно назвать эффективным радиусом кончика. Очевидно, что эта величина определяется геометрией нагружения и может существенно превышать размеры ОНД (которая по порядку величины равна Δ_T). Отметим, что K_{Ic}^* также зависит от конфигурации нагружения, так как $\Delta_T = \Delta_T(p_\infty, \Delta_S)$ [19]. Таким образом, при высоких всесторонних давлениях не существует определенного набора материальных свойств горных пород, которые можно было бы использовать в качестве критерия разрушения в рамках ЛУМР.

Возрастание равновесного избыточного давления Δp (или кажущейся вязкости разрушения K_Q) с ростом всестороннего давления отражает эффективное увеличение прочности горных пород с глубиной. Составляющую вязкости разрушения, которая пропорциональна p_∞ , можно назвать сопротивлением разрушению, индуцированным давлением (СРД). Его существование качественно объясняет возрастание прочности горных пород, которая наблюдалась во многих экспериментах при высоких всесторонних давлениях [13, 17, 39], хотя имеющихся данных недостаточно для оценки влияния возможной зависимости σ_T и δ_c от давления на экспериментальные результаты. Отметим, что влияние всестороннего давления на кажущуюся вязкость разрушения K_Q зависит не только от величины давления, но также от эффективного радиуса кончика $\xi_{\text{эф}}$ (уравнение (64)), который, в свою очередь, существенно зависит от размера Δ_S участка, не заполненного жидкостью. Это может быть причиной различия наклонов кривых $K_Q(p_\infty)$ для одного и того же материала при различных экспериментальных конфигурациях, в то время как измерения при атмосферном давлении дают вполне согласующиеся результаты (см., например, рис. 1 в работе [16]). Более того, как следует из (32), при $\Delta_S = 0, \Delta_T \ll a$ длина когезионной зоны убывает с увеличением всестороннего давления $\Delta_T \propto 1/p_\infty$, так что в этом случае ДБ модель предсказывает зависимость кажущегося коэффициента интенсивности от давления вида $K_Q \propto \sqrt{p_\infty}$, а не линейную, следующую из (64) и наблюдающуюся экспериментально. Это предсказание, в принципе, также поддается экспериментальной проверке.

Из (64) следует, что сопротивление, индуцированное давлением, преобладает над собственно прочностью пород (первое слагаемое в (64)), начиная с глубины

$$H > \frac{\sigma_T}{\rho g} \sqrt{\frac{\Delta_T}{\Delta_T + \Delta_S}}, \quad (65)$$

где ρ — плотность пород, а g — ускорение свободного падения.

Согласно данным [16] для гранита в максимум кривой $\sigma_T(\delta)$ $\sigma_T = 7$ МПа. Если принять для оценки $\sigma_T = 20$ МПа и плотность $\rho = 3 \cdot 10^3$ кг/м³, то даже в случае $\Delta_S = 0$ (жидкость заполняет трещину до основания когезионной зоны) СРД преобладает над собственно прочностью пород начиная с глубины всего примерно 0,7 км. В

действительности, вклад СРД в кажущуюся вязкость разрушения превышает прочность пород, начиная с еще меньших глубин, если жидкость не проникает до самого основания когезионной зоны, как это следует из экспериментальных данных [4, 40] и теоретических соображений [19]. Например, если $\Delta_S / \Delta_T \geq 10^2$ (скажем, $\Delta_S > 4$ м, а $\Delta_T < 4$ см), то распространение трещины контролируется литостатическим давлением, начиная с глубин порядка 100 м. В этом случае равенство напряжений на кончике трещины, находящейся на пределе страгивания, возникает за счет того, что растягивающие напряжения, создаваемые давлением жидкости, приложенным к внутренней поверхности, компенсируются, в основном, всесторонним давлением, приложенным к участку Δ_S трещины, в который жидкость не поступает. При этом собственно прочность горных пород не влияет на распространение трещин растяжения, во всяком случае, если механические свойства пород изотропны. Если прочность анизотропна (например, в слоистой среде), то распространение трещин гидро-, магморазрыва может до некоторой степени контролироваться ориентацией ослабленных слоев.

Влияние всестороннего давления на распространение трещин особенно велико на больших глубинах. В качестве примера рассмотрим трещину на глубине 100 км ($p_\infty \approx 3$ ГПа). Предположим, что в одном случае трещина полностью заполнена жидкостью ($\Delta_S = 0$), и $\Delta_T = 1$ мм (размер зерна), а во втором существует область вблизи кончика длиной $\Delta_S = 1$ м, в которую жидкость не поступает. В первом случае $K_Q = 100$ МПа м^{1/2}, а во втором $K_Q = 300$ МПа м^{1/2}, что в 10^2 — $3 \cdot 10^3$ раз выше значений, типичных для горных пород при нулевом давлении [39]. Это означает, в частности, что затраты энергии на разрушение, связанные с внедрением трещины магморазрыва на больших глубинах, могут не быть пренебрежимо малыми по сравнению со скоростью высвобождения механической энергии и вязкой диссипацией, сопровождающей течение магмы, что существенно усложняет уравнения, описывающие распространение даек [41, 42].

7. Заключение. В терминах модели Дагдейла — Баренблатта рассмотрены задачи о предельном равновесии трещин растяжения и сдвига в горных породах как при атмосферном, так и при высоком всестороннем давлении. Главное предположение модели — локализация области неупругого деформирования (ОНД) в (беско-

нечно) тонкой зоне, являющейся продолжением трещины, — несомненно является упрощением реальной ситуации. В действительности, ОНД имеет трехмерную структуру. Конечная ширина ОНД сказывается особенно заметно при высоких всесторонних давлениях, так как с возрастанием давления размеры когезионной зоны в ДБ модели уменьшаются, что проявляется в зависимости феноменологических параметров модели от всестороннего давления [30].

Модель, тем не менее, правильно отражает существенные качественные особенности процесса трещинообразования в горных породах. В частности, модель предсказывает существование помимо длины трещины еще одного макроскопического параметра размерности длины — критической длины трещины l^* (22), которая при атмосферном давлении составляет 3—4 см для известняков и около 10 см для гранитов. Предельные случаи короткой и длинной трещин определяются как раз соотношением между критической длиной трещины и длиной ее открытой части. Например, зависимость кажущейся вязкости разрушения от длины трещины в этих двух предельных случаях существенно различается. Как показано выше, для трещин растяжения при нулевом всестороннем давлении — случая, который лучше всего исследован экспериментально, ДБ модель предсказывает зависимость кажущейся вязкости разрушения от длины трещины, которая прекрасно согласуется с экспериментальными данными.

Подчеркнем, что размеры образцов, испытываемых в лабораторных экспериментах, как раз порядка критической длины. Если размеры образцов окажутся меньше критической длины, то в процессе нагружения когезионная зона выйдет на границы образца, что приведет к большой погрешности при определении прочностных характеристик. Видимо, именно в этом причина резкого расхождения результатов экспериментов Хашида и других [16] по гидроразрыву гранитного цилиндра (толщина стенок примерно 15 мм, в то время как критическая длина для гранита примерно 9 см) с их же исследованиями гранита по схеме компактного растяжения (длина образца около 100 мм) и экспериментами Абу-Сайеда [14, 15] по гидроразрыву цилиндров, изготовленных из известняка (толщина стенок 56 или 96 мм, критическая длина 3,5 см).

Критическая длина является существенным параметром еще с одной точки зрения. Полная длина (включая когезионные зоны) микротре-

щины гидроразрыва порядка эффективной критической длины $l^*(p_\infty)$ (24) ($a/l^*(p_\infty)$ убывает от 0,6 до 0,2 при возрастании $l/l^*(p_\infty)$ от 10 до 10^3). Поэтому микротрещины, расположенные на расстоянии, меньшем критической длины, будут сильно взаимодействовать, вследствие чего может сформироваться связанная система трещиноватости, а следовательно трещинная конвекция и/или фильтрация флюидов. Таким образом, параметром, определяющим связность микротрещиноватости, например, в зонах частичного плавления, может являться не размер открытых трещин, который, видимо, близок к размеру зерен, а значительно больший параметр — эффективная критическая длина $l^*(p_\infty)$. При увеличении всестороннего давления p_∞ эффективная критическая длина убывает, вследствие чего при высоких давлениях трещиноватые породы в состоянии удерживать большее количество флюидов, чем породы в приповерхностных слоях. Реально этот эффект становится существенным, начиная с глубины порядка $h_T = \sigma_T / \rho g$. Для гранитов $\sigma_T \approx 7$ МПа, так что $h_T \approx 300$ м. На еще больших глубинах эффективная критическая длина может стать меньше размера зерна. Если феноменологические параметры ДБ модели (критическое раскрытие δ_c и когезионное напряжение σ_T), а также модуль сдвига не зависят от давления и температуры, то эффективная критическая длина становится меньше размера зерна на глубине 10—15 км. Если при этом характерный размер микротрещин порядка размера зерен, как, например, в случае плавления по граням зерен, то связность пористости определяется уже не критической длиной трещин, а их физической длиной l .

На возможность взаимодействия трещин в случае перекрытия когезионных зон, по-видимому, впервые обратили внимание Костров и Дас [24], которые рассмотрели массив трещин поперечного сдвига, расположенных в одной плоскости. В процессе нарастания внешнего сдвигового напряжения длина когезионных зон, обеспечивающих равновесие трещин, возрастает. Когда достигается коалесценция когезионных зон, начинается асейсмическое скольжение, завершающееся переходом в катастрофический режим.

Интересным следствием зависимости эффективной критической длины от всестороннего давления может быть возрастание проницаемости частично расплавленного массива в восходящих потоках под срединно-океаниче-

скими хребтами или в процессе всплывания горячих термиков, образующихся в результате тепловой неустойчивости в верхней мантии. Увеличение связности микротрещиноватости в процессе такого всплывания может быть следствием декомпрессионного плавления пород. Но даже если декомпрессионное плавление оказывается подавленным, например вследствие теплоотдачи в окружающую среду или особенностей фазовой диаграммы пород, рост проницаемости может быть следствием увеличения эффективной критической длины трещин, а значит и их полной длины в процессе всплывания (рис. 7). Перколяционная связность во фразальных системах имеет, как известно, выраженный пороговый характер (см., например, [43]). При этом из физических соображений ясно, что параметром, определяющим связность, является отношение размера дефектов к расстоянию между ними. Декомпрессионное плавление приводит к увеличению концентрации трещин и уменьшению расстояния между ними, а увеличение эффективной критической длины к увеличению эффективного размера трещин. Поэтому можно ожидать, что возрастание критической длины более эффективно как причина возникновения связанной трещиноватости, чем декомпрессионное плавление, при относительно небольших степенях плавления и на меньших глубинах. К сожалению, сделать более определенные количественные оценки в

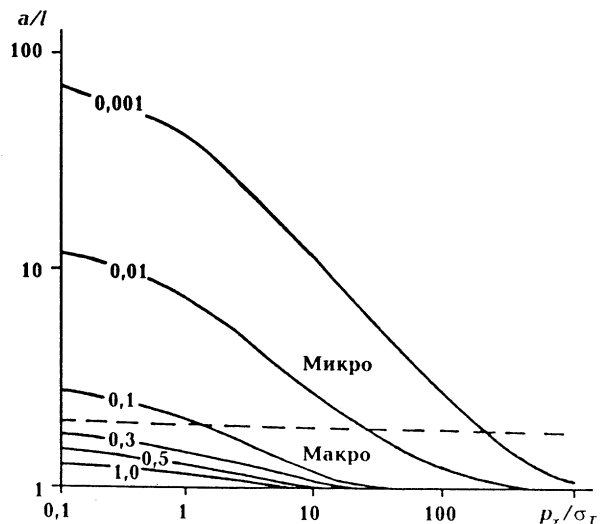


Рис. 7. Зависимость отношения полной длины трещины к длине ее открытой части a/l от безразмерного всестороннего давления p_∞/σ_T . Цифры на кривых показывают значения безразмерной длины открытой части трещины l/l^* . Штриховая линия $a/l = 2$ разделяет области микро- и макротрещиноватости.

настоящее время невозможно ввиду отсутствия лабораторных данных, которые позволили бы оценить критическую длину трещин для основных и ультраосновных пород.

Важным достоинством ДБ модели является то, что она позволяет учесть влияние всестороннего давления на прочность пород. В частности, в ДБ модели находит естественное объяснение различие наклонов зависимостей $K_Q(p_\infty)$ в различных лабораторных экспериментах. Поскольку эффективная прочность горных пород при высоких всесторонних давлениях в основном определяется размером зоны, в которую жидкость не проникает, ДБ модель связывает эти различия просто с различием конфигураций нагружения.

Как отмечалось выше, при высоких всесто-

ронных давлениях длина когезионной зоны уменьшается, возрастают девиаторные напряжения и возможна неупругая деформация вне плоскости трещины. Следовательно, нарушается основное предположение ДБ модели, в которой когезионная зона предполагается бесконечно тонкой. В то же время для больших трещин и глубин, превышающих несколько сотен метров, собственно прочность пород перестает играть заметную роль, так как равновесие трещин обеспечивается не когезионными силами, а всесторонним давлением, действующим на участки трещины, куда жидкость не проникает. Иначе говоря, ДБ модель применима и в этом случае, если вместо когезионных сил включить в рассмотрение сопротивление разрушению, индуцированное всесторонним давлением.

Список литературы

1. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение: В 7 т. / Под ред. Г. Либовица. — М.: Мир, 1975. — Т. 2. — С. 204—335.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
3. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. — 1957. — 78. — P. 361—364.
4. Warpinski N. R. Measurement of width and pressure in a propagating hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. — February 1985, — P. 46—54.
5. Palmer I. D., Veatch R. W. Abnormally high fracturing pressures in step rate tests // Proc. 62nd Ann. Techn. Conf. of SPE Paper No. 16902. — 1987. — P. 263—276.
6. Nolte K. G. Fracturing pressure analysis: Deviations from ideal assumptions // SPE Ann. Techn. Conf. (New Orleans, USA, 1990). SPE Paper No. 20704. — 1990.
7. Cleary M. P., Wright C. A., Wright T. B. Experimental and modeling evidence for major changes in hydraulic fracturing design and field procedures. SPE Paper No. 21494 // Proc. SPE Gas Technology Symp. — 1991. — P. 131—146.
8. Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. — Leyden: Noordhoff, 1974. — 408 p.
9. Schmidt R. A. Fracture-toughness testing of limestone // Exper. Mech. — 1976. — 15. — P. 161—167.
10. Ingraffea A. R., and Schmidt R. A. Experimental verification of a fracture mechanics model for tensile strength prediction of Indiana limestone // Proc. 19th US Symp. on Rock Mech., ed. Y.-S. Kim, Univ. of Nevada (Reno). — 1978 — P. 247—253.
11. Perkins T. K., Kreh W. W. Effect of cleavage rate and stress level on apparent surface energies of rocks // Society Petrol. Eng. J. — 1966. — 6. — P. 308—314.
12. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A. — 1920. — 221. — P. 163—198.
13. Schmidt R. A., Huddle C. W. Effect of confining pressure on fracture toughness of Indiana limestone // Intern. J. Rock. Mech. & Geomech. Abstr. — 1977. — 14. — P. 289—293.
14. Abou-Sayed A. S. Fracture toughness, K_{Ic} , of triaxially loaded Indiana limestone // Proc. 18th U.S. Symp. Rock Mech. — 1977. — P. 2A3/1—2A3/8.
15. Abou-Sayed A. S. An experimental technique for measuring the fracture toughness of rocks under downhole stress conditions // VCI-Berichte. — 1978. — No. 313. — P. 819—824.
16. Hashida T. H., Oghikubo H., Takahashi H., Shoji T.. Numerical simulation with experimental verification of the fracture behavior in granite under confining pressures based on the tension-softening model // Intern. J. Fracture. — 1993. — 59. — P. 227—244.
17. Thallak S., Holder J., Gray K. E. The pressure dependence of apparent hydrofracture toughness // Intern. J. Rock. Mech. & Geomech. Abstr. — 1977. — 30. — P. 831—835.
18. Ingraffea A. R. Theory of crack initiation and propagation in rock // Fracture mechanics of rock / Ed.

- B.K. Atkinson. — San Diego (Calif.): Acad. Press. — 1987. — P. 277—349.
19. Rubin A. Tensile fracture of rock at high confining pressure: Implications for dike propagation // J. Geophys. Res. — 1993. — 98. — P. 15919—15935.
 20. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. of Solids. — 1960. — 8. — P. 100—104.
 21. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ЖПМТФ. — 1961. — № 4. — С. 3—56.
 22. Ida Y. Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and Griffith's specific surface energy // J. Geophys. Res. — 1972. — 77. — P. 3796—3805.
 23. Chen Y. T., Knopoff L. Static shear crack with a zone of slip-weakening // Geophys. J. R. Astron. Soc. — 1986. — 87. — P. 1005—1024.
 24. Kostrov V. V., Das S. Idealized models of fault behavior prior to dynamic rupture // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1982. — 72. — P. 679—703.
 25. Райс Дж. Механика очага землетрясения. — М.: Мир, 1982. — 132 с.
 26. Swanson P. L. Tensile fracture resistance mechanisms in brittle polycrystals: an ultrasonic and in situ microscopy investigation // J. Geophys. Res. — 1987. — 92. — P. 8015—8036.
 27. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Песков Ю. А., Черепанов Г. П. О локальной пластической зоне вблизи конца щели // Механика твердого тела. — 1970. — № 1. — С. 61—64.
 28. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Песков Ю. А., Черепанов Г. П. О локальной пластической зоне вблизи конца щели (плоская деформация). // Там же. — № 5. — С. 132—138.
 29. Levy N., Marcal P. V., Ostergreen W. J., Rice J. R. Small scale yielding near a crack in plain strain: a finite element analysis // Intern. J. Fracture. — 1971. — 7. — P. 143—156.
 30. Fialko Y. A., Rubin A. M., 1997. Numerical simulation of high-pressure rock tensile fracture experiments: Evidence of an increase in fracture energy with pressure? // J. Geophys. Res. — 1997. — 102. — P. 5231—5242.
 31. Khazan Ya. M., Fialko Yu. A., 1995. Fracture criteria at the tip of fluid driven cracks in the Earth // Geophys. Res. Lett. — 1995. — 22. — P. 2541—2544.
 32. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
 33. Лаврентьев М. А., Шабат Б. Б. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958. — 678 с.
 34. Rice J. R. A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks // J. Appl. Mech. — 1968. — 35. — P. 379—386.
 35. Li V. C., Chan C.-M., Leung C. Experimental determination of the tension-softening relations for cementitious composites // Cement and Concrete Research. — 1987. — 17. — P. 441—452.
 36. Cleary M. P., Wright C. A., Wright T. B. Experimental and modeling evidence for major changes in hydraulic fracturing design and field procedures // Proc. SPE Gas Technology. — 1991. — P. 131—146.
 37. Shlyapobersky J., Chudnovsky A., Fracture mechanics in hydraulic fracturing // Proc. U. S. Rock Mech. Symp., 33rd — 1992. — P. 827—836.
 38. Delaney P. T., Pollard D. D., Ziony J. I., McKee E. H., Field relations between dikes and joints: Emplacement process and paleostress analysis // J. Geophys. Res. — 1986. — 91. — P. 4920—4938.
 39. Atkinson B. K., Meredith P. G. Experimental fracture mechanics data for rocks and minerals // Fracture mechanics of rock / Ed. B. K. Atkinson. — San Diego (Calif.): Acad. Press, 1987. — P. 477—525.
 40. Johnson E., Cleary M. P. Implications of recent laboratory experimental results for hydraulic fractures // Soc. Petrol. Eng. Paper No. SPE 21846, 1991. — 16 p.
 41. Spence D. A., Turcotte D. L. Magma driven propagation of cracks // J. Geophys. Res. — 1985. — 90. — P. 575—580.
 42. Lister J. R., Kerr R. C., Fluid-mechanical models of crack propagation and their application to magma transport in dykes // Ibid. — 1991. — 96. — P. 10049—10077.
 43. Фегер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 260 с.
 44. Barker L. M. K_{Ic} measurements using short rod specimens the elastic-plastic case // Terra Tek Report. — 1977. — P. TR77—91R.